Prof. Dr. Alfred Toth

Zu den Grundvoraussetzungen einer Zahl

1. Bekannt ist die Aussage des Nikolaus von Kues: „Die Zahl aber ist aus sich selbst zusammengesetzt" (cit. ap. Bense 1992, S. 5). Entsprechend war Bense in seinem Spätwerk zum Schluss gekommen, sowohl das Zeichen als auch die Zahl seien eigenreal, d.h. sie referierten nur eine ihre eigene, d.h. innere semiotische Realität – und damit sind sie natürlich wie bei Cusanus aus sich selbst zusammengesetzt. Werden andere Objekte als Zeichen klassifiziert, fallen sie somit in andere der neun Zeichenklassen des Peirceschen Tripeluniversums. Dazu gehören z.B. auch die von Hilbert so gerne erwähnten Bierseidel, Tische und Stühle eines Restaurants, die man nach einer häufig zitierten Aussage von ihm anstellle der „Systeme von Dingen" (Hilbert 1987, S. 2) setzen könne. Damit widersprechen sich aber die Festellung von Bense und die Behauptung von Hilbert.

2. Ich glaube, eine Lösung der Frage, was denn eine Zahl wirklich sei, kann nur dann gefunden werden, wenn gezeigt werden kann, welche mathematischen und semiotischen Grundvoraussetzungen zur Charakterisierung einer Zahl nötig sind. Zum vornherein ist jedoch klar, dass die Ausstattung eines Restaurants nicht anstelle von Zahlen benutzt werden kann, da man z.B. Gläser wohl zählen, aber nicht mit ihnen rechnen kann, denn dadurch dass man etwas zählen kann, wird es selbst keineswegs zur Zahl; diese wird bloss auf das Objekt abgebildet. Wenn wir zählen, machen wir Objekte zu Zeichen, genauer: zu Zahl-Zeichen. Diese referieren aber nur auf die Quantität, nicht die Qualität dieser Objekte. Da es aber völlig egal ist, welche Zeichen irgendeines irgendwie geordneten Alphabetes wird auf die Objekte abbilden – wir können z.B. statt natürlicher Zahlen die Buchstaben irgendeines Schriftsystems nehmen – ist es grundfalsch anzunehmen, es gebe eine besondere Teilmenge von Zeichen mit der Eigenschaft, nur quantiativ, aber nicht qualitativ zu sein und so Objekte dadurch zu bezeichnen, dass aus ihrem Referenzbereich, um mit Hegel zu sprechen, alle Qualitäten bis auf die eine Qualität der Quantität ausgeklammert werden. Ebenso falsch wäre es zu behaupten, die quantitative

Einchränkung des Referenzbereiches der Objekte geschehe zwar nicht durch die Zahl-Zeichen, jedoch durch eine besondere Abbildung (Semiose), welche die Eigenschaft der Quantitätsauslese besitze. Es ist zwar richtig, dass jedes Zeichen die konstitutiven Merkmale von Objekten stark reduziert – um sie ins Prokrusestbett ihrer repräsentativen Funktion zu zwängen, so dass man die Zeichenklassen bezüglich der Merkmalsmengen ihrer Objekte sozusagen als kleinste gemeinschaftliche Vielfache auffassen und die ganze Welt der Objekte nach dem Peirceschen System in nur 10 Zeichenklassen einteilen kann, aber bei Zeichen sind grundsätzlich Qualitäten und Quantitäten gleichermassen vertreten, sie werden sogar im Mittelbezug des Zeichens eigens durch die Erstheit der Erstheit und durch die Zweitheit der Erstheit repräsentiert (vgl. Bense 1979, S. 61).

3. Daraus können wir nun einen fundamentalen Schluss ziehen: **Die semiotische Eigenschaft des Qualitätsausschlusses der Zeichen liegt daran, dass diese keine Zeichen, sondern Objekte sind.** Obwohl sich spätestens seit Freges „Grundlagen der Arithmetik“ (1884) eine ganze Literatur darüber, was eine Zahl sei und was nicht, angesammelt hat, war dieser Schluss im Prinzip bereits Dedekind klar, wie aus dem Einleitungskapitel seiner Arbeit „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (1887) hervorgeht:

§ 1

Systeme von Elementen

1. Im folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding *a* oder gar von *a* zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch *a* bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben *a* selbst meint. Ein Ding ist vollständig be-

Damit sind wir imstande, unsere Ausgangsfrage wie folgt einzugrenzen: Was unterscheidet Objekte wie die Hilbertschen Bierseidel, Tische und Stühle von Objekten wie den Zahlen? Hilbert selbst stellte fest: „Die Axiome der Arithmetik sind im wesentlichen nichts anderes als die bekannten Rechnungsgesetze mit Hinzunahme des Axiomes der Stetigkeit. Ich habe sie kürzlich zusammengestellt und dabei das Axiom der Stetigkeit durch zwei einfachere Axiome ersetzt, nämlich das bekannte Archimedische Axiom und ein neues Axiom des Inhaltes, daß die Zahlen ein System von Dingen bilden, welches bei Aufrechterhaltung der sämtlichen übrigen Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist (Axiom der Vollständigkeit) (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900, S. 180).

Vergleichen wir aufgrund dieser Angaben die Zahlobjekte mit den Zeichen: Mit Zeichen kann man nicht rechnen, denn wenn man z.B. 2 Stoppschilder statt 1 an einer Kreuzung aufstellt, ergibt sich keine „Zeichensumme", die mehr bezeichnete oder bedeutete als es schon das 1 Stoppschild tut. Zeichen sind auch keineswegs stetig, sondern können durch zahlreiche Operationen auf alle nur erdenklichen Weisen zusammengesetzt werden, und zwar deshalb, weil sie mit dem drittheitlichen Interpretanten das „Zeichen im Zeichen" im Sinne eines unendlichen Regresses (auch „La vache qui rit"-Effekt genannt) enthalten. Das Archimedische Axiom trifft auf die Menge der Zeichen deswegen nicht zu, weil es nicht zutrifft, dass zu zwei Zeichen x und y mit $y > x > 0$ es immer eine natürliche Zahl (bzw. ein irgend geartetes Zeichen) gibt, so dass $nx > y$ gilt. Was schliesslich das Axiom der Vollständigkeit betrifft, so trifft es auf Zeichen überhaupt nicht zu, und zwar einerseits wegen des bereits erwähnten unendliches Regresses von Zeichen nicht, und andererseits deshalb nicht, weil stets neue Objekte zu Zeichen erklärt werden können.

Summa summarum trifft also kein einziges arithmetisches Axiom auf die Zeichen zu. Das führt uns natürlich wiederum zum Schluss, dass es eine Gruppe von Objekten geben muss, die eben durch diese Axiome gekennzeichnet sind, und das sind die Zahlen. Impressionistisch ausgedrückt, sind es offenbar die folgenden Grundvoraussetzungen, die Zahlen ausmachen: 1. Sie sind von Natur aus (d.h. nicht erst durch einen Abbildungsprozess, d.h. durch eine Semiose) so geordnet, dass sie keine „Sprünge" enthalten und dass durch Anwendung der Rechenregeln nicht aus ihrem System herausgetreten werden kann. Zeichen haben also eine Art von „(vorgegebener) innerer Ordnung" und vermehren sich nur innerhalb eines abgeschlossenen Systems". Da besonders die letztere Eigenschaft ausschliesslich für Zahlen zutrifft, wird man zu,m

Schluss geführt, dass die Zahlen als Objekte in ihrer Gesamtheit eine Welt in oder neben der Welt, d.h. eine eigene Metaphysik bilden.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden–Baden 1979

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Hilbert,David, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1987

7.4.2011